GARA1 2019-20 SECONDARIA DI SECONDO GRADO INDIVIDUALE

ESERCIZIO 1

Premessa.
Questi problemi trattano di *entità* correlate da fatti; ciascuna entità ha *valori* discreti. Nei problemi vengono enunciati dei fatti e da questi occorre *ragionare* e trarre *conclusioni* per associare opportunamente i valori di numero di galline, dimensione del pollaio e colore del gallo. Esempi di risoluzione di esercizi simili sono presenti nella guida OPS.

PROBLEMA (per la premessa vedere PDF della gara)

In un vaso ci sono 60 palline di tre colori diversi: rosse, verdi, blu. Il numero delle palline per ogni colore è 10, 20, 30. Tutte le palline dello stesso colore hanno lo stesso peso e lo stesso diametro. Il peso complessivo per i tre colori è 100, 120, 200 grammi e il diametro di ogni pallina per i tre colori è 0,9 cm, 1,0 cm e 1,1 cm. Il numero di palline, i pesi complessivi e i diametri sono elencati in ordine casuale (e quindi non si corrispondono ordinatamente). Determinare per ogni colore, quante palline ci sono, quanto pesano e il diametro di ciascuna pallina, sapendo che:

1. Le palline blu complessivamente pesano più di tutte
2. Le palline più numerose hanno il diametro inferiore
3. Le palline rosse sono più numerose delle palline verdi
4. Il peso di ogni pallina blu è 20 g
5. Il volume totale delle verdi è $10/3\ \pi\ cm^3$
6. Le palline con diametro inferiore sono quelle dal peso complessivo inferiore

Inserire le risposte nella tabella sottostante, utilizzando la virgola come separatore dei decimali.

COLORE PALLINE	NUMERO PALLINE	PESO COMPLESSIVO (g)	DIAMETRO PER PALLINA (cm – riportare 0,9 o 1,0 o 1,1
Rosse			
Verdi			
Blu			

SOLUZIONE

COLORE PALLINE	NUMERO PALLINE	PESO COMPLESSIVO (g)	DIAMETRO PER PALLINA (cm)
Rosse	30	100	0,9
Verdi	20	120	1,0
Blu	10	200	1,1

COMMENTI ALLA SOLUZIONE

Fatto 1- Le palline Blu pesano 200 g;

Fatto 2- Le palline più numerose hanno diametro 0,9 cm;

Fatto 3- Le palline Rosse non sono 10 e sono maggiori delle Verdi;

Fatto 4- Le palline Blu sono 10, in quanto ognuna pesa 20 g e complessivamente 200 g. Le Rosse quindi sono 30 e le Verdi 20; da questo e dal Fatto 2 si ricava che le Rosse hanno diametro 0,9 cm;

Fatto 5 – Le 20 palline Verdi hanno un volume totale di $20*4/3\ \pi\ r^3 = 10/3\ \pi$, risolvendo l'equazione si ottiene r = 0,5 e diametro 1,0, quindi le Blu hanno diametro 1,1 cm;

Fatto 6 – Le palline con diametro inferiore, 0,9 cm, hanno peso 100 g e quindi le Verdi 120 g.

Con questo la tabella è completa.

ESERCIZIO 2

Premessa.

In un foglio a quadretti è disegnato un "campo di gara", per esempio di 14 quadretti in orizzontale e 5 in verticale (vedi figura).

									S				
					P								
→													

Ogni casella può essere individuata da due numeri (interi); per esempio la casella contenente P è individuata da essere nella sesta colonna (da sinistra) e nella terza riga (dal basso): brevemente si dice che ha *coordinate* [6,3]; la prima coordinata (in questo caso 6) si dice *ascissa* e la seconda (in questo caso 3) si dice *ordinata*. Le coordinate della casella contenente S sono [10,4] e di quella contenente la freccia sono [1,1].
La freccia può essere pensata come un robot, in questo caso rivolto verso destra; lo stato del robot può quindi essere individuato da tre "valori": due per le coordinate della casella che occupa e uno per indicare il suo orientamento. Per quest'ultimo si possono usare i simboli della stella dei venti: E, S, W, N: per indicare che il robot è rivolto, rispettivamente, a *destra*, in *basso*, a *sinistra*, in *alto* (con riferimento a chi guarda il foglio); lo stato del robot, rappresentato dalla freccia nella figura è [1,1,E].
Il robot può eseguire tre tipi di comandi:

- girarsi di 90 gradi in senso *orario*: comando **o**;
- girarsi di 90 gradi in senso *antiorario*: comando **a**;
- avanzare di una casella (nel senso della freccia, mantenendo l'orientamento): comando **f**.

Questi comandi possono essere concatenati in sequenze in modo da permettere al robot di compiere vari percorsi; per esempio la sequenza di comandi descritta dalla lista [f,f,f,f,f,a,f,f] fa spostare il robot dalla posizione e orientamento iniziali mostrati in figura fino alla casella P; le caselle via via occupate (quella di partenza e quella di arrivo comprese) sono quelle della lista:

[[1,1],[2,1],[3,1],[4,1],[5,1],[6,1],[6,2],[6,3]].

Stessa casella di arrivo si raggiunge con la lista di comandi [a,f,f,o,f,f,f,f,f], ma il percorso è diverso ed è descritto dalla lista

[[1,1],[1,2],[1,3],[2,3],[3,3],[4,3],[5,3],[6,3]].

Inoltre, nel primo caso lo stato l'orientamento finale del robot è verso l'alto (stato [6,3,N]), mentre nel secondo caso l'orientamento finale è verso destra (stato [6,3,E]).

PROBLEMA (per le premesse vedere il PDF della gara)

In un campo di gara il robot si trova nella casella (5,10) con direzione Nord e deve eseguire la seguente lista di comandi [a,a,f,o,f,f,a,f,a,f].
Determinare la lista L che descrive il percorso compiuto dal robot. Come nella premessa, ciascuna casella deve essere descritta da una lista di 2 coordinate (prima la colonna e poi la riga), e il percorso deve essere formato da una lista contenente le liste che descrivono ciascuna delle caselle che formano il percorso. Si raccomanda di non inserire spazi nelle liste. Ad esempio il percorso formato dalle caselle (3,4), (4,4) e (4,3) è descritto dalla lista **[[3,4],[4,4],[4,3]]**.
Inserire la risposta nella casella sottostante.

L	[ ]

SOLUZIONE

L	[[5,10],[5,9],[4,9],[3,9],[3,8],[4,8]]

COMMENTI ALLA SOLUZIONE

La direzione è indicata con le iniziali delle parole Nord (alto), Sud (basso), Est (destra) e West (sinistra).

La lista di comandi è [a,a,f,o,f,f,a,f,a,f]. La posizione iniziale è (5,10) e la direzione iniziale del robot è Nord.

Per determinare L, è conveniente visualizzare il percorso, come nella figura che segue (che mostra solo parzialmente il campo di gara, con il valore delle coordinate). Nelle caselle attraversate dal robot è stato inserito un numero. I numeri mostrano l'ordine in cui le caselle sono attraversate.

12								
11								
10					.1			
9			.4	.3	.2			
8			.5	.6				
7								
	1	2	3	4	5	6	7	8

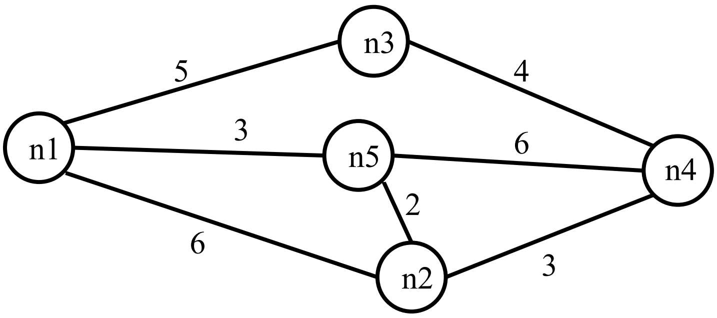
Osservando la figura è semplice determinare la sequenza di comandi che fa compiere tale percorso. Si deve prestare attenzione all'orientamento del robot. Inizialmente il robot si trova in [5,10] con direzione Nord, ovvero ha stato [5,10,N]. Il primo comando modifica la direzione, portandola a West, ovvero trasforma lo stato in [5,10,W]. Il secondo comando porta la direzione a Sud mentre terzo comando fa percorrere un passo lungo la direzione del robot, e quindi lo stato diviene [5,9,S]. Ragionando in modo analogo, si ricostruiscono tutti i movimenti, riassunti nella seguente tabella che mostra, per ogni comando, l'evoluzione dello stato del robot.

Stato di partenza	Comando	Stato di arrivo
[5,10,N]	a	[5,10,W]
[5,10,W]	a	[5,10,S]
[5,10,S]	f	[5,9,S]
[5,9,S]	o	[5,9,W]
[5,9,W]	f	[4,9,W]
[4,9,W]	f	[3,9,W]
[3,9,W]	a	[3,9,S]
[3,9,S]	f	[3,8,S]
[3,8,S]	a	[3,8,E]
[3,8,E]	f	[4,8,E]

Per determinare il percorso del robot, si devono considerare tutte le caselle attraversate, compresa la casella iniziale e quella finale. La soluzione quindi è **L= [[5,10],[5,9],[4,9],[3,9],[3,8],[4,8]]**.

ESERCIZIO 3

Premessa.
Un *grafo* si può pensare come l'astrazione di una carta geografica: per esempio il grafo rappresentato nella figura seguente, descrive i collegamenti esistenti fra alcune (5) città: queste sono rappresentate da *nodi* di nome n1, n2, …, n5 e i collegamenti sono rappresentati da segmenti tra i nodi, detti *archi*.



A seconda del problema, gli archi possono essere percorsi in entrambe le direzioni (e in questo caso si parla di archi non-diretti) oppure solo in una (archi diretti). Gli archi diretti si rappresentano mediante una freccia, che va dal nodo di *partenza* a quello di *destinazione*.
In alcuni problemi, a ogni arco è associata una lunghezza, ovvero un numero, detta anche *peso* dell'arco. Quando gli archi di un grafo hanno un peso, si dice che sono *pesati* e i pesi degli archi vengono rappresentati come numeri scritti vicino alle frecce.
Dunque il grafo rappresentato in figura ha archi non-diretti e pesati.
Un grafo può essere descritto, invece che da una figura, mediante un elenco di termini, ciascuno dei quali definisce un arco tra due nodi del grafo. Nel caso di grafi con archi non pesati, si usano termini con due argomenti. I due argomenti sono i nomi dei nodi connessi dall'arco. Spesso (ma non in tutti i problemi!) si userà il termine "arco" per archi non diretti e "freccia" per archi diretti. Quindi un arco non diretto e non pesato, che connette i nodi **x** e **y**, sarà descritto dal termine **arco(x,y),** mentre un arco diretto e non pesato, che connette i nodi **Bologna** e **Roma** sarà descritto dal termine **freccia(Bologna,Roma).**
Nel caso di grafi con archi pesati, è necessario descrivere il peso, oltre che i due nodi collegati. Per questo motivo si useranno termini con 3 argomenti: i primi due sono i nomi dei nodi collegati e il terzo è un numero che rappresenta il valore del peso.
Il grafo rappresentato dalla precedente figura, che ha archi non diretti e pesati, viene quindi descritto dal seguente insieme di termini:

arco(n1,n2,6)	**arco(n1,n3,5)**	**arco(n3,n4,4)**
arco(n1,n5,3)	**arco(n2,n4,3)**	**arco(n2,n5,2)**
arco(n5,n4,6)		

Due nodi si dicono *adiacenti* tra loro, se sono collegati da un arco. Dato un arco non diretto, i due nodi collegati dall'arco, vengono detti *estremi* dell'arco. Dato un arco diretto dal nodo **x** al nodo **y**, si dice che **x** è il nodo di *partenza* e **y** è il nodo di *destinazione*.
Dato un nodo **x**, chiamiamo *grado di ingresso* la quantità di archi distinti di cui **x** è destinazione.

Dato un nodo **x**, chiamiamo *grado di uscita* la quantità di archi distinti di cui **x** è nodo di partenza.
Dato un nodo **x**, chiamiamo (semplicemente) *grado* la quantità di archi di cui **x** è nodo di partenza oppure nodo di destinazione oppure, nel caso di arco non diretto, è uno dei due estremi.
Per esempio nel grafo in figura, il nodo n3 ha grado 2, gli altri hanno grado 3.
Un *percorso* (o *cammino*) tra due nodi del grafo consiste in una sequenza di nodi ciascuno dei quali (tranne l'ultimo) è adiacente con il successivo; un percorso può, quindi essere descritto con una lista di nodi (quelli toccati dal percorso, ordinata dal nodo di partenza al nodo di arrivo). Per esempio, la lista [n5,n2,n4,n3] descrive un percorso dal nodo n5 al nodo n3; tale percorso ha lunghezza K = 2 + 3 + 4 = 9.
Un *ciclo* è un percorso che inizia e termina nello stesso nodo, per esempio [n5,n2,n1,n5].
Un percorso si dice *semplice* se *non* ha nodi ripetuti: un percorso semplice, quindi, non contiene cicli; per esempio [n5,n2,n4,n3] è semplice, mentre [n5,n2,n1,n5,n2,n4,n3] non è semplice perché ha nodi ripetuti.
N.B. Dato un grafo, come quello della precedente figura, è facile scrivere l'insieme di termini che lo descrivono; viceversa, disegnare il grafo da un insieme dei termini è meno ovvio (si vedano i problemi seguenti).

PROBLEMA (per le premesse vedere il PDF della gara)

Un grafo è descritto dal seguente elenco di archi diretti e non-pesati:

freccia(n4,n6)	freccia(n7,n8)	freccia(n3,n6)	freccia(n2,n5)
freccia(n3,n1)	freccia(n4,n5)	freccia(n2,n3)	freccia(n3,n4)
freccia(n8,n5)	freccia(n7,n2)		

Disegnato il grafo, trovare:

1. La lista L1 che contiene i nodi che sono destinazione di un arco che ha come nodo di partenza **quello con il grado maggiore**
2. La lista L2 del percorso semplice formato dal maggior numero di archi tra **n2** e **n5**
3. La lista L3 di tutti i nodi per i quali esiste un cammino semplice che arriva fino a **n5** *(si noti che n5 non fa parte di L3 in quanto non esistono archi che collegano un nodo con sé stesso)*

Scrivere la soluzione nella seguente tabella.

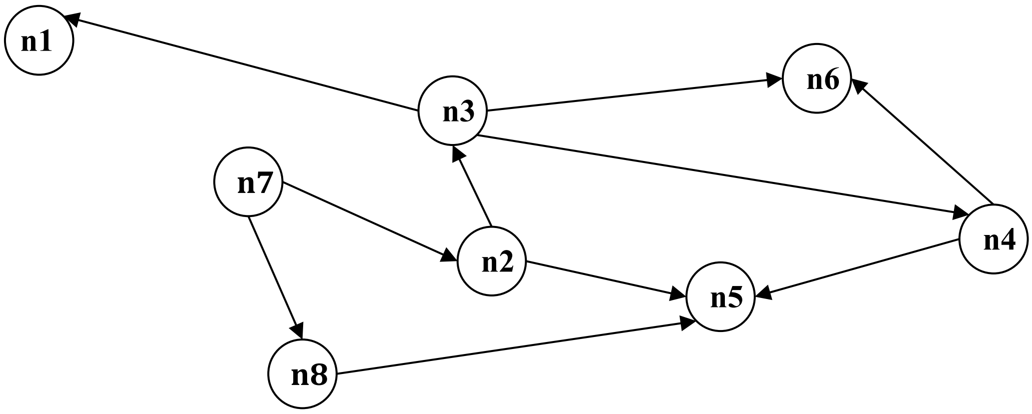
L1	[ ]
L2	[ ]
L3	[ ]

SOLUZIONE

L1	[n1,n4,n6]
L2	[n2,n3,n4,n5]
L2	[n2,n3,n4,n7,n8]

COMMENTI ALLA SOLUZIONE
Per disegnare il grafo si osservi innanzitutto che sono menzionati 8 nodi; si procede per tentativi; si disegnano gli 8 punti nel piano e li si collega con archi costituiti da segmenti: probabilmente al primo

tentativo gli archi si incrociano; si cerca poi di risistemare i punti in modo da evitare gli incroci degli archi: spesso questo si può fare in più modi.



Per calcolare L1, si deve innanzitutto trovare il nodo che ha grado maggiore, ovvero che ha la maggior quantità di archi entranti in esso o uscenti da esso. Ispezionando la figura, si vede immediatamente che si tratta di **n3**, che ha 3 archi uscenti e uno entrante; gli altri nodi hanno grado al massimo pari a 3. Dunque L1 è la lista ordinata dei nodi che sono destinazione di un arco che parte da **n3**, ovvero L1=[n1,n4,n6].
Per calcolare L2, dobbiamo per prima cosa individuare tutti i percorsi semplici che vanno da **n2** fino a **n5**. Uno di tali percorsi è l'arco diretto che va da **n2** a **n5**, ovvero è formato da un solo arco. Partendo da n2 è possibile andare in un passo anche in n3, e da n3 si può andare in n1, n6 o n4. Da n1 e da n6 non escono archi, quindi non vi sono cammini fino a n5; invece da n4 si può andare in n5. Quindi un secondo percorso semplice tra n2 ed n5 è [n2,n3,n4,n5], che è formato da 3 archi. Non vi sono altri percorsi semplici tra n2 ed n5, quindi L2=[n2,n3,n4,n5].
Per rispondere alla terza domanda, conviene considerare uno ad uno tutti i nodi e verificare nella figura se esiste un cammino fino a n5:

1. Da n1 non si raggiunge alcun altro nodo
2. Da n2 si raggiunge n5
3. Da n3, passando per n4, si raggiunge n5
4. Da n4 si raggiunge n5
5. Da n5 non si raggiunge n5 stesso
6. Da n6 non si raggiunge alcun altro nodo
7. Da n7, passando per n2, si raggiunge n5
8. Da n8 si raggiunge n5

Quindi L3=[n2,n3,n4,n7,n8]

ESERCIZIO 4

Premessa.

Un algoritmo di crittazione a sostituzione monoalfabetica consiste nel sostituire ogni simbolo del messaggio in chiaro con quello dato da una tabella di conversione, che trasforma ogni simbolo in un altro. La particolare tabella usata è la chiave di crittazione. Ad esempio, con la seguente tabella di conversione (o chiave di crittazione):

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
W	X	Y	U	V	N	K	L	M	O	P	Q	R	S	T	Z	D	E	F	A	B	C	G	H	I	J

(ovvero la A diventa una W, la B una X, etc.)

la parola NASO è crittata in SWFT. Un caso particolare è dato dal cifrario di Cesare, cifrario a sostituzione monoalfabetica in cui ogni lettera del testo in chiaro è sostituita nel testo cifrato dalla lettera che si trova un certo numero di posizioni dopo nell'alfabeto. Ad esempio, considerando un cifrario con chiave 13, la parola NASO è crittata in ANFB.

Un algoritmo di crittazione a sostituzione *polialfabetica* è una generalizzazione di quello monoalfabetico, in cui si utilizza una chiave di crittazione e una tabella Vigenère, riprodotta qui sotto:

```
  A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z

A A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z
B B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z A
C C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z A B
D D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z A B C
E E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z A B C D
F F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z A B C D E
G G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z A B C D E F
H H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z A B C D E F G
I I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z A B C D E F G H
J J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z A B C D E F G H I
K K L M N O P Q R S T U V W X Y Z A B C D E F G H I J
L L M N O P Q R S T U V W X Y Z A B C D E F G H I J K
M M N O P Q R S T U V W X Y Z A B C D E F G H I J K L
N N O P Q R S T U V W X Y Z A B C D E F G H I J K L M
O O P Q R S T U V W X Y Z A B C D E F G H I J K L M N
P P Q R S T U V W X Y Z A B C D E F G H I J K L M N O
Q Q R S T U V W X Y Z A B C D E F G H I J K L M N O P
R R S T U V W X Y Z A B C D E F G H I J K L M N O P Q
S S T U V W X Y Z A B C D E F G H I J K L M N O P Q R
```

T T U V W X Y Z A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S
U U V W X Y Z A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T
V V W X Y Z A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U
W W X Y Z A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V
X X Y Z A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W
Y Y Z A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X
Z Z A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y

Per crittare un messaggio, si considera la prima lettera del messaggio e la prima lettera della chiave; sulla tavola di Vigenère queste due lettere si usano come una sorta di coordinate cartesiane che individuano rispettivamente la riga che inizia con la prima lettera e la colonna che inizia con la seconda lettera; all'incrocio si trova la lettera da sostituire nel messaggio crittato. Per le altre lettere del messaggio si procede similmente, ma utilizzando le successive lettere della chiave; siccome in generale la chiave è più corta del messaggio, la stessa chiave verrà usata ripetutamente fino a completare la crittazione del messaggio. Ad esempio: usando come chiave TRE, la parola STELLA è crittata in LKIECE.

PROBLEMA (per le premesse vedere il PDF della gara)

1. Usando il cifrario di Cesare, decrittare il messaggio EFUMYA NQZQ e scriverlo nella riga 1, conservando uno spazio tra le parole, sapendo che è il risultato di una doppia crittazione, prima con chiave 5, poi con chiave 7.
2. Decrittare il messaggio LKIFJN AMZF e scriverlo nella riga 2, conservando uno spazio tra le parole, sapendo che, con la medesima chiave di crittazione, le seguenti parole sono crittate come segue:

   MINIERA => INJNMZF
   DADO => LFLK
   ASSO => FAAK
3. Usando un algoritmo di crittazione a sostituzione polialfabetica, con chiave SOLE e considerando la tavola Vigenère, decrittare il messaggio HWZKYWL FSHEIFHP e scriverlo nella riga 3, conservando uno spazio tra le parole. Scrivere le risposte nella tabella sottostante.

1	
2	
3	

SOLUZIONE

1	STIAMO BENE
2	DOMANI SERA
3	PIOGGIA BATTENTE

COMMENTI ALLA SOLUZIONE

1. La doppia crittazione equivale ad una crittazione con chiave 12 (5+7)

	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z
12	m	n	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l

2. Dagli indizi seguenti:

MINIERA => INJNMZF   DADO => LFLK   ASSO => FAAK

Ricaviamo le seguenti corrispondenze D – L, A – F, O—K, S—A, M—I, I—N, N—J, E—M, R—Z che permettono di decrittare il messaggio.

3. Il messaggio crittato è costituito da 2 parole che uniamo per poter scrivere più volte la parola chiave

H	W	Z	K	Y	W	L	F	S	H	E	I	F	H	P
S	O	L	E	S	O	L	E	S	O	L	E	S	O	L

Mediante la tabella di Vigenère e la regola:

nella riga LETTERA (della parola chiave) cerco la corrispondente lettera del messaggio crittato trovata tale lettera risalgo la colonna per leggere la lettera nella sua prima cella.

Es. riga S ---- valore H ---- colonna P
riga O ---- valore W ---- colonna I   ecc.
Proseguendo si giunge al messaggio decrittato PIOGGIABATTENTE che naturalmente va riscritto nella tabella in forma di due parole separato da un solo spazio.

ESERCIZIO 5

PROBLEMA
Data la seguente procedura

```
procedure Calcolo1;
variables A, B, C, D integer;
read B, C;
A = B/C + 10;
D = (A + 2*B + 6*C +6)/3;
B = A + D;
C = A + B;
write A, B, C, D;
end procedure;
```

Se all'inizio per le scatole B e C vengono acquisiti i seguenti valori B = 8 e C = 2, calcolare i contenuti finali delle variabili (o scatole) A, B, C e D e riportarli nella tabella sottostante.

A	
B	
C	
D	

SOLUZIONE

A	14
B	30
C	44
D	16

COMMENTI ALLA SOLUZIONE

Operazioni	Calcoli
A = B/C + 10	A= 8/2 + 10 = 14
D = (A + 2*B + 6*C + 6)/3	D = (14 + 2*8 + 6*2 + 6)/3 = 16
B = A + D	B = 14 + 16 = 30
C = A + B	C = 14 + 30 = 44

ESERCIZIO 6

PROBLEMA

```
procedure Calcolo2;
variables A, B integer;
read A, B;
A = A + 4*B;
B = A + 6*B;
A = A + 3*B;
B = A – B;
write A, B;
end procedure;
```

Calcolare i valori finali di A, B corrispondenti ai seguenti valori iniziali A = 9, B = 11 e riportarli nella tabella sottostante.

A	
B	

SOLUZIONE

A	410
B	291

COMMENTI ALLA SOLUZIONE

Istruzione	A	B
read A,B	9	11
A=A+4*B	53	11
B=A+6*B	53	119
A=A+3*B	410	119
B=A-B	410	291

ESERCIZIO 7

PROBLEMA

```
procedure Calcolo3;
variables A, B, C, M integer;
read A, B, C;
if A > B then
  M = A;
else
  M= B;
endif;
if C > M then
  M = C;
endif;
write M;
end procedure;
```

Calcolare il valore finale di M corrispondente ai seguenti valori iniziali A = 27, B = 24, C = 48 e scriverlo nella casella sottostante.

M	

SOLUZIONE

M	48

COMMENTI ALLA SOLUZIONE
La sequenza dei valori attribuiti alla variabile M è la seguente
M = A cioè M = 27 poiché 27 > 24 è vero
if 48 > 27 (vero) then M = C cioè M = 48.
write M = 48;

ESERCIZIO 8

PROBLEM
Let f be a function so defined:

$$f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$

$$f(x) = \begin{cases} x + 5 & if \quad x \leq 10 \\ x - 10 & if \quad x > 10 \end{cases}$$

We denote with $f^n(x) = f(f(\ldots f(x)))$ where f is repeated n times (e.g. $f^3(x) = f(f(f(x)))$).

Calculate $f^3(7)$, $f^{10}(10)$ and $f^{1815}(1724)$.
Write your answers as integer numbers in the boxes below.

$f^3(7)$	
$f^{10}(10)$	
$f^{1815}(1724)$	

SOLUTION

$f^3(7)$	7
$f^{10}(10)$	15
$f^{1815}(1724)$	14

TIPS FOR THE SOLUTION

$f^3(7) = f(f(f(7))) = f(f(12)) = f(2) = 7$

$f^{10}(10) = f^9(15) = f^8(5) = f^7(10) = f^6(15) = f^5(5) = f^4(10) = f^3(15) = f^2(5) = f(10) = 15$

To calculate $f^{1815}(1724)$ we observe that 1724 >> 10 so for a big number of iteration the function will only subtract 10 from the number: practically $f^{172}(1724) = 4$ so $f^{1815}(1724) = f^{1815-172=1643}(4)$.

Now a table could help:

$f^{1643}(4)$ =	$= f^{1642}(9)$ =	$= f^{1641}(14)$ =
$= f^{1640}(4)$ =	$= f^{1639}(9)$ =	$= f^{1638}(14)$ =
…	…	…
$= f^5(4)$ =	$= f^4(9)$ =	$= f^3(14)$ =
$= f^2(4)$ =	$= f(9)$ =	= 14